

PARA ENSEÑAR LAS OPERACIONES

Cualquier experiencia en la manipulación de objetos, como pueda ser la unión de dos grupos de caramelos para obtener un grupo de más cantidad, o el reparto de un número determinado de objetos en grupos de tres, puede sustituirse por una operación simbólica que se represente por medio de números y símbolos abstractos. El problema surge cuando el alumno tiene que asociar una actividad con su traducción en el lenguaje propio de las matemáticas, utilizando símbolos arbitrarios (+, -, x, :) y números que representan cantidades de elementos.

Contrariamente a lo que podría suponerse, la enseñanza de las cuatro operaciones podría y debería llevarse a cabo desde la Educación Infantil, no obstante hay que considerar la forma en que se proponga las tareas a los alumnos. Desde muy pequeños, mediante la manipulación de objetos, los niños son capaces de unir elementos y contar el nuevo número obtenido, también puede completar un grupo con un determinado número de elementos, puede formar grupos de dos o tres elementos, o puede repetir grupos iguales. Es decir, el trabajo de los alumnos de Educación Infantil con las operaciones matemáticas estará basado en la manipulación y representación gráfica con unos elementos sobre los que se ejecuta una acción, dejando para edades posteriores el proceso de abstracción numérica y simbólica de la suma, la resta, la multiplicación y la división, tal y como se plantea habitualmente.

Para que se pueda iniciar al alumno en las operaciones matemáticas, es condición necesaria que comprenda las expresiones y palabras que se utilizan para indicar al alumno la tarea que debe realizar. Es decir, mediante los verbos de acción, se indica a los alumnos cuál es la tarea que se propone para cada una de las operaciones. Las expresiones que podrían utilizarse en cada una de las operaciones o tareas relacionadas con las mismas serían las siguientes:

Sumar	Restar	Multiplicar	Dividir
unir agregar aumentar almacenar reunir juntar sumar agrupar ...	quitar gastar sacar disminuir cortar altar sobrar restar ...	juntar tantas veces repetir tantas veces añadir tantas veces reunir tantas veces sumar tantas veces ...	repartir agrupar dividir hacer conjuntos ...

Figura 1:

Verbos de acción a utilizar en cada una de las operaciones aritméticas.

La ventaja en el uso de esta variedad de expresiones para enseñar al alumno a manipular los objetos es doble. En primer lugar, se facilita la comprensión de vocabulario relacionado con la operación y, en segundo lugar, se predispone al alumno ante una diversidad lingüística con la que deberá enfrentarse en cursos posteriores para resolver los problemas que se le plantearán, tanto oralmente como escritos.

a) La suma

Una vez que los alumnos han comprendido la operación de la suma la principal dificultad consiste en resolver aquellas operaciones que requieren la compensación de órdenes, es decir, que exigen la "llevada". Para que el alumno comprenda el concepto de "llevada", es necesario que domine el concepto de decena que debe conllevar el uso de materiales manipulativos, tales como el ábaco o las regletas, aunque también los gráficos facilitan la comprensión de este concepto tan complejo.

Veamos el siguiente ejemplo en el que se plantea un problema a un alumno que ha superado la fase manipulativa: *"Alicia tiene 169 bolas y compró otras 75 más, ¿cuántas bolas tendrá en total?"* Para trabajar de forma comprensiva el problema, es necesario descomponer las cantidades propuestas de la siguiente forma:

Centenas (C)	Decenas (D)	Unidades (x)	C	D	U
C	DDDDDD	xxxxxxxx	1	6	9
C	DDDDDD D	xxxxx		7	5
2	4	4	2	4	4

En este cuadro vemos la representación gráfica de la operación que se lleva a cabo, mientras que en la parte derecha del mismo se sitúan los números operando con mayor simbolismo.

Una vez que se colocan las cantidades en los órdenes correspondientes, se procede a compensar los órdenes inferiores agrupando de diez en diez dichos órdenes y compensando en el inmediatamente superior. En nuestro ejemplo, existirían catorce unidades, pero si tomamos diez, automáticamente pasa una decena más al orden superior, es decir, el correspondiente a las decenas. Con lo cual, las decenas ya no tendrán trece elementos, sino catorce. Del mismo modo, agrupamos diez elementos de las decenas, que pasan al orden superior transformándose en una centena. Al final, contamos los elementos existentes en cada orden y los colocamos cada número en su lugar.

Cuando se ha comprendido el proceso, el alumno puede utilizar un procedimiento más rápido, puesto que no necesita la mediación de la fase gráfica para resolverlo de forma comprensiva. Sin embargo, para comprender el concepto de “llevada” algunos alumnos necesitan practicar reiteradamente el proceso de la compensación de órdenes de forma gráfica.

En la Red existen una infinidad de juegos gratuitos que pueden ayudar a los niños a aprender y a practicar la suma. La web [Jueduland](#), del maestro del CEIP Miguel de Cervantes de Lérganes (Madrid), ha realizado una recopilación muy interesante sobre aplicaciones educativas para [sumar](#).

b) La resta

Como en el caso de la suma, la enseñanza de la resta como operación matemática, lleva consigo la utilización de una diversidad de verbos de acción. Pero además debemos presentar distintas situaciones de la vida real que puedan ser resueltas mediante una resta. Existen tres situaciones distintas:

1. La situación más sencilla es aquella en la que se concibe la resta como “quitar” o “encontrar un resto”. Por ejemplo en el problema siguiente: *“Alberto tiene 14 caramelos y se come 5, ¿cuántos le quedan?”* La identificación de la operación por parte del alumno no suele tener ninguna dificultad.
2. En la “búsqueda de un complementario” se pretende hallar una cantidad que falta para llegar a obtener otra. Por ejemplo: *“Marina tiene 8 años, ¿cuántos le faltan para tener 13?”*
3. En la “comparación de dos magnitudes”, se trata de establecer la diferencia (beneficio o pérdida) de dos cantidades. Por ejemplo: *“¿Cuánto dinero tiene más Sergio que Marta, sabiendo que Sergio tiene 15 euros y Marta tiene 9?”*

De las tres situaciones expuestas, la primera suele ser la más habitual y más sencilla en el proceso de enseñanza de la resta. Sin embargo, una completa comprensión de dicha operación exige disponer al alumno ante las otras dos situaciones.

La web [Jueduland](#), del maestro del CEIP Miguel de Cervantes de Lérganes (Madrid), ha realizado una recopilación muy interesante sobre aplicaciones educativas para practicar la [resta](#).

c) La multiplicación

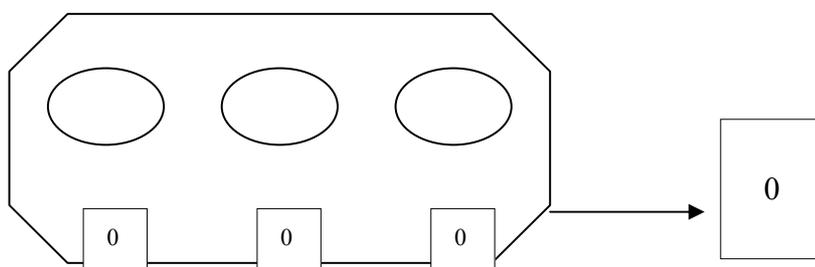
La multiplicación es una suma de sumandos iguales. Teóricamente es idéntico a la operación de sumar un número de veces la misma cantidad, aunque cuanto se plantea su enseñanza en el aula suele tratarse de una operación distinta. Este hecho es comprensible, pero es mejor hacer ver al alumno que se trata de una técnica operatoria más cómoda ante situaciones problemáticas que exigen realizar varias sumas.

Una de las dificultades añadidas en el aprendizaje del algoritmo de la multiplicación es la memorización de la tabla de multiplicar. Para facilitar su aprendizaje conviene que, previamente, el alumno haya realizado seriaciones progresivas y regresivas de números (de dos en dos, de tres en tres,...). Una vez que demuestre cierto dominio en estas tareas, conviene que sea él mismo quien construya su tabla, comenzando por la del dos, siguiendo por la del cinco y, a continuación, con la del diez, al ser éstas tablas las que suelen costar menos trabajo de memorización. Más adelante, continúan con la elaboración de la tabla del cuatro y del ocho. Y, finalmente, con la del tres, el seis y el nueve. Si nos damos cuenta, falta la tabla del siete. No es un olvido casual, sino derivado de la necesidad de hacer ver al alumno la propiedad conmutativa, puesto que puede formar la tabla del siete teniendo en cuenta los valores obtenidos en las anteriores, con la excepción del 7×7 .

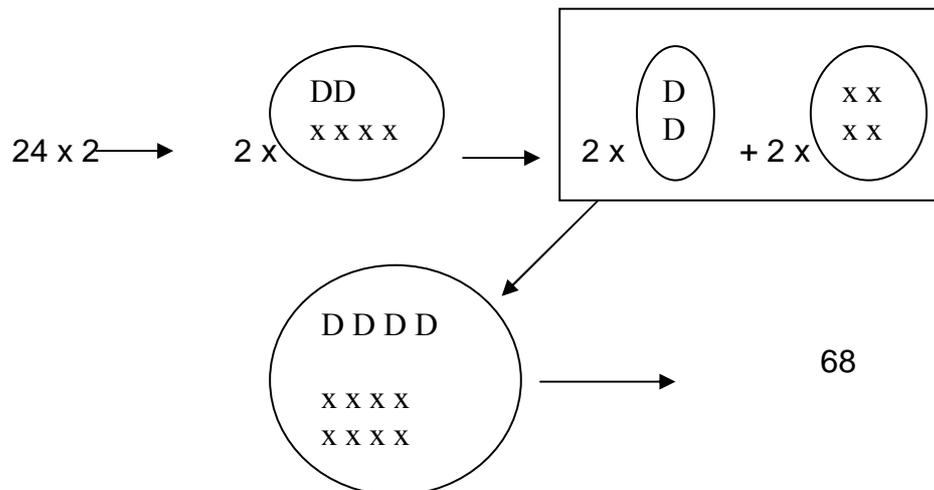
Existen distintos métodos para enseñar a multiplicar a los niños. En el siguiente vídeo se explican los más usados, por si tienes [problemas con las tablas de multiplicar](#).

Teniendo en cuenta los errores que más frecuentemente cometen los alumnos, presentamos las orientaciones más pertinentes para prevenir sus dificultades y afrontar la enseñanza de una forma comprensiva.

El producto de cualquier cantidad por cero puede ilustrarse gráficamente por medio del siguiente dibujo, en el que se muestra claramente que tres veces cero es cero.



Una vez que los alumnos comprenden el concepto de la multiplicación y han elaborado su tabla, el siguiente paso en el proceso de enseñanza debe consistir en proponer situaciones problemáticas que exijan la multiplicación de más de un dígito. En este caso pueden darse las dos siguientes condiciones: multiplicación sin reagrupación y multiplicación con reagrupación. El primer caso es más sencillo puesto que exige al alumno tener en cuenta la llevada, como por ejemplo el problema: “Ana tiene 24 cromos, ¿cuántos tiene Javi si tiene el doble que Ana?” Gráfica y simbólicamente se resolvería de la siguiente forma:



En el segundo caso, cuando se plantea un problema donde es necesario la reagrupación de cantidades, el proceso se complica más, puesto que, en este caso, el alumno deberá tener en cuenta la llevada, para lo cual procede descomponiendo el número en sus correspondientes órdenes, tal y como se mostró gráficamente en la operación de suma. En la Red existen muchos vídeos didácticos con fórmulas más o menos sencillas que pueden [ayudar en el estudio y la memorización de las tablas de multiplicar](#).

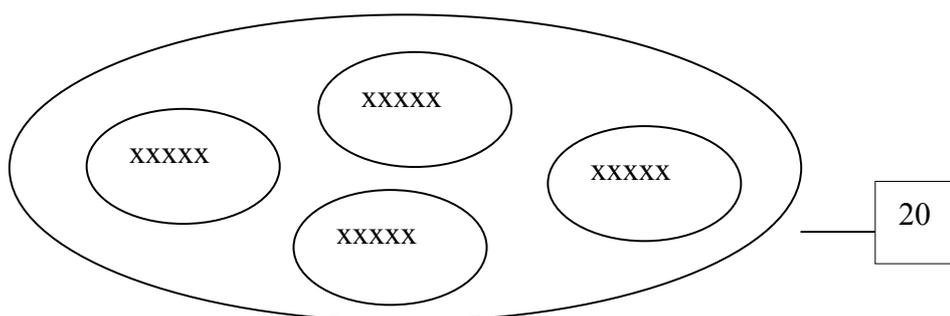
d) La división

La división es un caso especial de la descomposición de una magnitud en varias partes. Aunque suele presentarse como sinónimo de reparto, realmente tal sinonimia no es del todo correcta, puesto que repartir implica que las partes resultantes sean iguales. La comprensión del concepto de la división exige que el alumno realice tareas preparatorias que impliquen el reparto de objetos o elementos de un conjunto. Desde este punto de vista, los significados de la división serían tres:

1. Repartir en partes iguales, que es el significado más sencillo.
2. Hallar cuántas veces están contenido un número en otro.
3. Hallar el factor que falta.

La primera acepción del término “dividir”, no suele tener problemas para el alumno, al menos para comprender la operación manipulativa y gráfica que hay que desarrollar, puesto que la división no es más que la agrupación sucesiva de determinado número de elementos. Un ejemplo posible sería el siguiente: “Si repartes en partes iguales 15 lápices entre 3 niños, ¿cuántos lápices corresponderá a cada uno?” En este ejemplo, dividendo (15) y divisor (3) son de distinta naturaleza, y suele ser el modelo de problema que, relacionado con la división, se trabaja en la escuela con mayor frecuencia.

En la segunda acepción, dividendo y divisor son de igual naturaleza, puesto que implica obtener un determinado número de veces una cantidad que está contenida en otra. Por ejemplo: “¿Cuántos paquetes de 5 caramelos se podrán hacer con 20 caramelos?” Para resolver este problema pueden utilizarse distintas estrategias dependiendo de la madurez de alumno. La forma más sencilla de solucionarlo es mediante la clasificación de los 20 caramelos en grupos de cinco elementos (5). Una vez formado los grupos la respuesta al problema se obtiene al contarlos (4).



Si el alumno ha superado la fase gráfica que le ayudaría a comprender la operación, la resolución podría obtenerse mediante la resta sucesiva de 5 caramelos a los 20 que inicialmente forman el conjunto hasta que no nos quede ningún elemento. En este caso, el alumno comprueba que se han podido completar cuatro paquetes, puesto que cada una de las restas implica que, sucesivamente, se quitan cinco caramelos con los que formábamos un paquete.

$$20 - 5 = 15$$

$$15 - 5 = 10$$

$$10 - 5 = 5$$

$$5 - 5 = 0$$

En tercer lugar, cuando se plantea “hallar el factor que falta” el significado nos conduce a considerar la división como inversas a la multiplicación. Utilizando como base el ejemplo anterior, el problema sería el siguiente: “Repartí 20 caramelos, correspondiendo 5 caramelos a cada niño, ¿a cuántos niños di caramelos?” De forma simbólica, el problema podría representarse de esta forma: $5 \times ? = 20$

Sólo cuando el alumno haya comprendido las tres acepciones de la división se debe plantear la resolución de problemas utilizando la división desde un punto de vista exclusivamente simbólica. En este caso se debe enseñar a colocar los números en sus respectivos lugares (dividendo, divisor, cociente,...). Una vez que se ha alcanzado este nivel, la secuencia de enseñanza que proponemos, de menor a mayor dificultad para el alumno, será la siguiente:

<i>Secuencia</i>	<i>Ejemplo</i>
Una cifra en el dividendo y una cifra en el divisor, con resto igual a cero	$4 : 2 = 2$ (Resto = 0)
Una cifra en el dividendo y una cifra en el divisor, con resto distinto de cero	$8 : 3 = 2$ (Resto = 2)
Dos cifras en el dividendo y una en el divisor, con resto igual a cero	$12 : 3 = 4$ (Resto = 0)
Dos cifras en el dividendo y una en el divisor, con resto distinto a cero	$25 : 3 = 8$ (Resto = 1)
Dos cifras en el dividendo y una en el divisor, con separación inicial de una cifra en el dividendo	$84 : 5 = 16$ (Resto = 4)
Tres cifras en el dividendo y una en el divisor, con separación inicial de una cifra en el dividendo	$754 : 4 = 188$ (Resto = 2)
Tres cifras en el dividendo y una en el divisor, con separación inicial de dos cifras en el dividendo	$215 : 6 = 35$ (Resto = 5)
Cuatro cifras en el dividendo y una en el divisor, con separación inicial de una cifra en el dividendo	$9160 : 5 = 1832$ (Resto = 0)
Cuatro cifras en el dividendo y una en el divisor, con separación inicial de dos cifras en el dividendo	$2460 : 9 = 273$ (Resto = 3)

Figura 2:

Secuencia en la enseñanza de la división

Cuando el alumno domina la última secuencia expuesta, se puede introducir al alumno en la resolución de problemas que exijan la aplicación de una división con dos cifras en el divisor, para lo cual podemos seguir en la enseñanza una secuencia similar.

En este vídeo de [BrainPop](#), Tim y Moby nos enseñan las principales características de la [división](#).